



Éléments finis spéciaux – Histoire et réalités d’aujourd’hui

Rezak Ayad

rezak.ayad@univ-reims.fr

Université de Reims Champagne-Ardenne, LISM EA 4695 ESI Reims, 3 Esplanade Roland Garos 51000 Reims cedex,

Résumé :

Le développement d’éléments finis revient sur scène depuis environ une quinzaine d’années, avec comme fil conducteur une spécificité applicative ciblée, mais aussi des exigences traditionnelles de précision et de convergence. Une pléthore de modèles sont certes proposés mais « aucun n’apparaît comme étant le meilleur » : une constatation souvent mise en avant, car motivée entre autres par l’exigence de précision. Aujourd’hui, il est important de savoir que les éléments finis classiques ou standards, formulés pour la plupart sur la base des interpolations de Lagrange, qu’ils soient intégrés exactement ou sous-intégrés, commencent à montrer leurs limites dans un monde où les technologies ou procédés industriels (mise en forme des matériaux, multi-matériaux et leurs comportements multi-physiques, aspects multi-échelles, ...) ne cessent d’évoluer. La conférence se propose de mettre en exergue quelques valeurs ajoutées pouvant intégrer des approches aux éléments finis, en faisant apparaître des cinématiques particulières ou des spécificités applicatives ciblées. La vocation restera à jamais l’amélioration des résultats de simulation de problèmes d’ingénierie. Ainsi, de la mise en forme des matériaux, notamment composites et biocomposites (sujets d’actualité), aux problèmes multi-physiques, sont présentées quelques démarches de modélisation par éléments finis spéciaux.

Mots clés : Éléments finis spéciaux, solides et coques, Composites, valeurs ajoutées et cinématiques particulières

1. Introduction

Aujourd'hui, est-il encore d'actualités pour évoquer une poursuite ou continuité à développer de nouveaux éléments finis ? Plus que jamais, la réponse est « oui ». A l'heure où nous écrivons le texte présent, il n'existe toujours pas d'éléments finis que l'on peut qualifier de meilleur. Depuis 50 ans (1968), le développement de nouveaux éléments finis n'a pas connu d'essoufflement. Cela a eu pour conséquence la publication d'une pléthore d'éléments. Beaucoup d'entre eux ont fini par intégrer des codes commerciaux de simulation numérique, et une grande majorité est restée confinée dans les tiroirs et répertoires numériques des laboratoires de recherche, n'ayant pas trouvé preneurs. Une chose est certaine ! Aucun des éléments finis proposés n'est apparu comme étant le meilleur pour répondre aux besoins précis de secteurs industriels divers et variés. Les trente dernières années ont vu naître des valeurs ajoutées mathématiques et physiques, proposées pour faire d'un « élément fini » un modèle simple d'implémentation numérique, d'utilisation et d'efficacité en matière de précision, avec, certes, une belle innovation sur les quinze dernières années consistant à les rendre plus spécifiques à des applications ciblées. La spécificité d'un nouvel élément fini peut-être ainsi envisagé sur plusieurs niveaux :

- la formulation variationnelle théorique. Nous citons notamment les modèles variationnels mixtes généralisés, les modèles mixtes-hybrides, les modèles hybrides ou les modèles classiques en déplacements (pour la mécanique des solides) ou en vitesses (le plus souvent en mécanique des fluides).
- le volume, la surface ou l'axe neutre élémentaires, autrement dit domaine élémentaire où des cinématiques locales et particulières peuvent être introduites pour prendre en compte une spécificité applicative associée à un secteur donné (mise en forme des matériaux, couplages fluide-structure, matériaux composites, etc...)
- les physiques combinées (approches multi-physiques), où des modèles constitutifs mettent en évidence des degrés de libertés (DDLs) nodaux non traditionnels comme les potentiels électriques (matériaux piézoélectriques) ou les potentiels magnétiques (matériaux ferromagnétiques), ...
- les approches non locales mettent en avant des DDLs correspondant à des gradients de déplacements ou de contraintes
- des fonctions Bulles pour améliorer la stabilité et la précision des modèles, sans introduire de DDLs additionnels, et des éléments avec modes incompatibles pour des précisions meilleures
- des fonctions d'onde pour enrichir des fonctions de forme classiques
- des combinaisons de matériaux non miscibles traduites au sein d'un domaine élémentaire, avec des applications notamment en matériaux composites

Nous proposons de présenter dans les sections suivantes quelques approches aux éléments finis spéciaux proposées dans la littérature et pour lesquelles nous avons apporté quelques contributions.

2. La grande histoire des éléments finis spéciaux pour les solides et les structures minces

2.1. Les éléments dits de « Kirchhoff Discret »

Avec le recul, nous pensons que des éléments finis basés sur l'approche des hypothèses discrètes de Kirchhoff, comme DKT ou DKQ, peuvent être qualifiés de d'excellents sinon les meilleurs dans le domaine des plaques minces où le cisaillement transversal est considéré négligeable. Ces éléments sont simples de géométrie et de formulation et conduisent à des résultats, notamment de flexion, qui ont satisfait bon nombre d'industriels soucieux d'optimiser leurs structures minces (plaques ou coques). La part membranaire (souvent présente dans les coques) a en revanche été le maillon faible de cette famille d'éléments. La seule contribution d'éléments classiques comme CST (Constant Strain Triangle) ou Q4 (le quadrangle à 4 nœuds) perturbe la valeur ajoutée créée par l'approche « Kirchhoff Discret ». Celle-ci fût proposée dès 1969 par Striklin & al [1] et par Dhatt [2], et exploitée avec pertinence par Batoz & al [3, 4, 5] et ses nombreux collaborateurs, en proposant DKT, DKQ et leurs dérivés.

2.2. Approches discrètes intégrant le cisaillement transversal

Principale guide du développement d'éléments finis nouveaux pour les solides et les structures, le verrouillage en CT (Cisaillement Transversal) a éliminé sur sa route plusieurs propositions de formulations élémentaires. De nos jours, il faudra désormais compter sur ce type d'éléments de structures basés sur des théories de premier ordre ou d'ordres supérieurs. La plus connue est la théorie linéaire de Reissner [6] ou de Mindlin [7]. Compléter leur œuvre en leur dédiant le bon modèle élément fini qui les confortera dans leur démarche d'il y a soixante-dix ans a été l'objectif que s'étaient fixé les chercheurs au début des années 70. Nous citons parmi les nombreuses synthèses bibliographiques sur le sujet, celles de Kerber [8] et Ayad & al [10]. Un grand nombre d'auteurs, comme Bathe, Hughes, Zienkiewitch, Belytschko, Taylor, Batoz, Dhatt, ... -

pour ne citer que ceux-là pour leur notoriété -, ont apporté leurs contributions en y mettant sur la grande table de la science un grand savoir-faire, rendant la formulation des éléments finis de Reissner-Mindlin facile et abordable. En ce qui nous concerne, nous avons voulu contribuer à cette extraordinaire réalisation en y proposant dans nos travaux antérieurs [9,10,11] de bons éléments mixtes-hybrides de plaques. Une fois passés en coque, ces éléments labellisés MiSP3 et MiSP4 (Mixed Shear Projection 3 & 4 nodes) ont vu leur performance légèrement affectée par la contribution d'éléments classiques de membrane comme CST ou Q4. De nouveaux modèles de plaque et coque, mixte-hybrides et en déplacement, plus performants, ont vu le jour par la suite. Le principe a consisté à introduire des hypothèses cinématiques et mécaniques discrètes, au niveau variationnel et élémentaire, permettant d'obtenir des éléments géométriquement très simples (triangles à 3 nœuds et quadrilatères à 4 nœuds, mais très performants en terme de précision et de convergence.

2.2.1. Le modèle mixte-hybride projeté pour les plaques et coques en flexion/CT

a. Aspects théoriques du modèle MiSP

Le modèle MiSP (Mixed with Shear Projection) est une approche variationnelle dans laquelle la forme intégrale correspondante associée à Hellinger-Reissner va permettre dans un premier temps de satisfaire au niveau variationnel une partie des équations d'équilibre d'une plaque en flexion/CT. Une des conséquences directes de cette modification est la possibilité d'utiliser une approximation des contraintes ou des efforts résultants avec un nombre minimum de paramètres à éliminer par condensation statique. Les modèles mixtes standards utilisent plusieurs paramètres d'approximation pour pouvoir satisfaire les conditions de stabilité, rendant ainsi la condensation statique coûteuse en temps CPU. Le formalisme variationnel du modèle MiSP, auquel nous rajouterons la contribution membranaire que nous avons choisi de définir en formulation naturelle hybride, s'écrit de manière synthétique :

$$W_{mf}^e = W_m^e + W_f^e \quad (1)$$

$$W_m^e = \int_{A^e} \left(\langle \varepsilon_0^* \rangle \langle \sigma_0 \rangle + \langle \sigma_0^* \rangle \langle \varepsilon_0 \rangle - \langle \sigma_0^* \rangle [H]^{-1} \langle \sigma_0 \rangle \right) h dA \quad : \text{membrane} \quad (2)$$

$$W_f^e = \int_{A^e} \left(\langle \varepsilon_1^* \rangle \langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_1^* \rangle \langle \varepsilon_1 \rangle - \langle \sigma_1^* \rangle [H]^{-1} \langle \sigma_1 \rangle \right) \frac{h}{3} dA \quad : \text{flexion} \quad (3)$$

$$W_c^e = \int_{A^e} \left(\langle \gamma_0^* \rangle \frac{2h}{3} \langle \tau_0 \rangle + \frac{2h}{3} \langle \tau_0^* \rangle \langle \gamma_0 \rangle - \frac{8h}{15} \langle \tau_0^* \rangle [G]^{-1} \langle \tau_0 \rangle \right) dA \quad : \text{Cis. Transversal} \quad (4)$$

W_{mf}^e et W_c^e sont respectivement les travaux virtuels élémentaires de membrane-flexion et de CT. L'élément fini développé est un quadrilatère à 4 nœuds et 6 ddls/nœud (pour une coque) ou 3 ddls/nœud (pour une plaque) (Figure 1). Une approximation bilinéaire des contraintes de flexion $\{\sigma_1\}$ suffit pour obtenir un élément stable. Le vecteur des contraintes de CT $\{\tau_0\}$ est défini à partir de $\{\sigma_1\}$ en satisfaisant comme mentionné précédemment deux équations de l'équilibre en flexion du milieu continu. La formulation hybride naturelle adoptée pour la membrane impose une approximation particulière des contraintes de membrane $\{\sigma_0\}$. Elle améliore sensiblement l'élément bilinéaire classique correspondant et conduit à un élément fini spécial moins sensible aux distorsions de maillages.

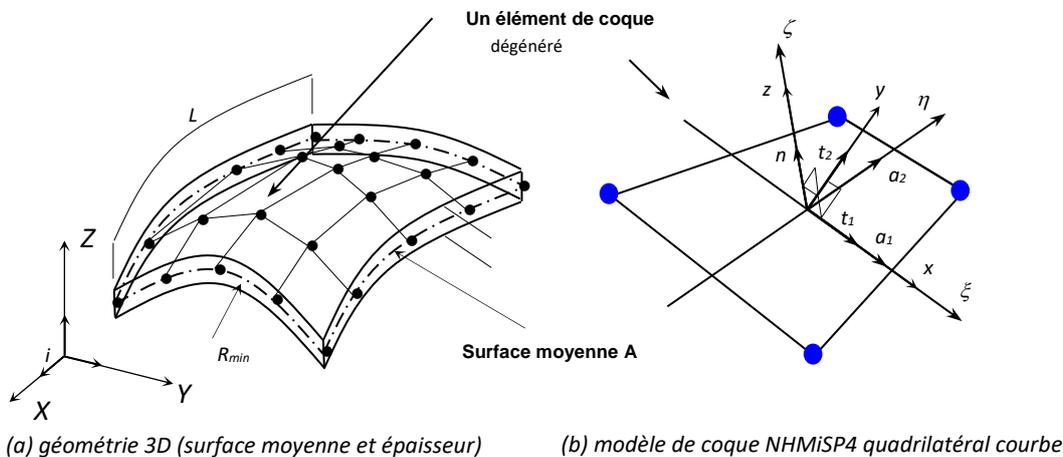


Figure 1. Élément quadrilatère mixte-hybride naturel à 4 nœuds (NHMiSP4)

Une 2^{ème} étape essentielle de la formulation des éléments sur la base du modèle MiSP est l'utilisation de la technique des déformations de CT de substitution (Assumed Natural Strain). Au lieu d'être définies en fonction

de l'approximation des variables cinématiques, les déformations cartésiennes de CT $\{\gamma_0\}$ sont définies dans un premier temps en fonction de quatre déformations tangentielles de bords que l'on projette sur les variables nodales : d'où le nom de « projection en cisaillement » pour le présent modèle.

b. Validation numérique du modèle MiSP - Cylindre pincé sous diaphragmes rigides

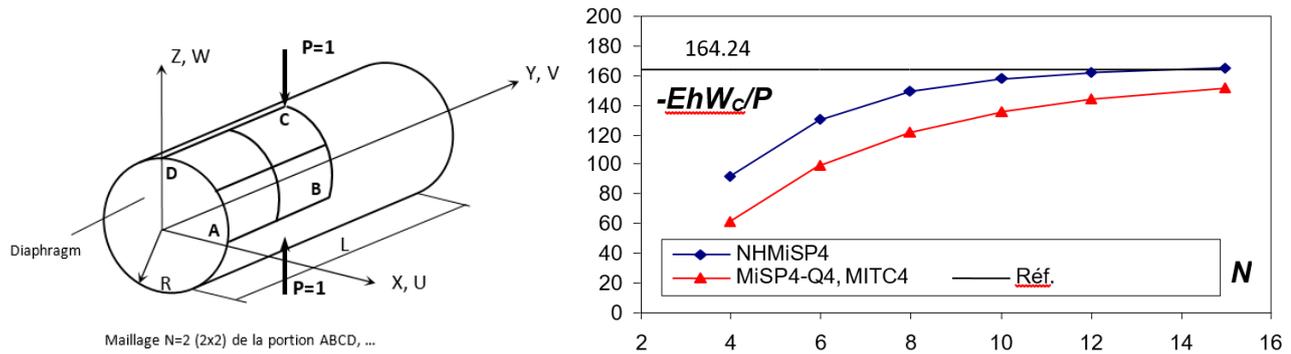


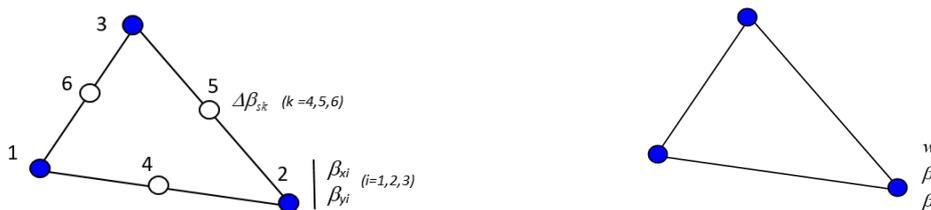
Figure 2. Cylindre pincé avec diaphragmes. Données et résultat du déplacement transversal au point C

Le cas-test de la figure 2 est celui d'un cylindre court ($L/R = 2$) ($R/h=100$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unitaires concentrées diamétralement opposées. Il permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). Les résultats du déplacement W_c sous charge en fonction du nombre N d'éléments suivant AB et BC montrent une convergence assez rapide vers la solution de référence donnée par Lindberg & al [12].

2.2.2. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin) pour les plaques et les coques composites multicouches

La figure 3 montre un élément fini particulier de plaque n'existant nulle part dans les codes commerciaux ou scientifiques. Pourtant il constitue la base de création d'un des éléments de plaques et coques les plus connus de la littérature : DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), mentionné en section §2.1. L'auteur utilise dans un premier temps une interpolation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne (β_x, β_y). Après avoir introduit l'hypothèse suivante de Kirchhoff sur les 3 bords élémentaires :

$$\int_0^{L_k} \gamma_s ds = 0 \quad ; \quad \gamma_s = w_{,s} + \beta_s \quad (\text{déformations de CT nulles : plaque mince}) \quad (5)$$



(a) Élément initial de base (rotations quadratiques) (b) Élément final à 3 nœuds : DKT (Kirchhoff) ou DMTS (Mindlin)

Figure 3. Formulation élémentaire de base pour DKT (sans CT) et DMTS (avec CT)

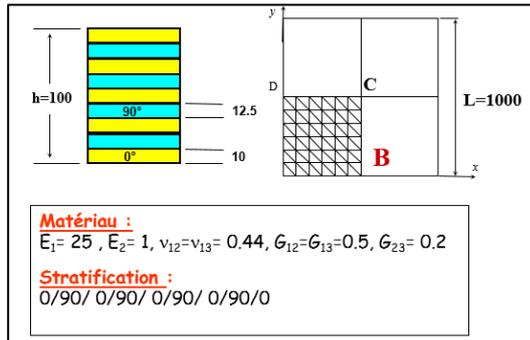
L'application de l'hypothèse (1) aux bords de l'élément de base (fig. 3a) permet d'éliminer les rotations $\Delta\beta_{sk}$ en les projetant sur les ddl classiques w, β_x, β_y aux trois nœuds sommet (fig. 3b). L'élément de plaque final DKT est très simple (3 nœuds et 3 ddl/nœud) et passe avec succès l'ensemble des cas-tests standards de plaques homogènes isotropes. Il a également été implémenté dans la plupart des codes éléments finis du marché. Bien que populaire, il reste limité aux seules structures minces sans effets de CT. Il devient donc nécessaire d'introduire de nouvelles procédures permettant d'obtenir des éléments finis simples et efficaces qui prendront en compte les effets du CT. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. Nous avons en ce qui nous concerne voulu exploiter l'idée « Kirchhoff Discret » en l'adaptant à la théorie de Mindlin (avec CT). L'équation (1) devient ainsi :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_s - (w_{,s} + \beta_s)) ds = 0 \quad (\text{hypothèse cinématique}) \quad (6)$$

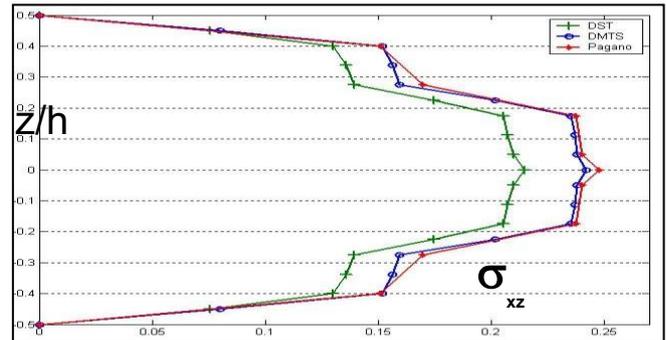
Elle sera appelée par la suite « 1ère hypothèse discrète de Mindlin ». Pour les matériaux et structures composites (activité importante de notre laboratoire de recherche), nous étions dans l'obligation de développer une seconde et nouvelle hypothèse discrète de Mindlin, afin d'éliminer les rotations $\Delta\beta_{sk}$. Celle-ci exploite les équations d'équilibre d'un élément différentiel de plaque et la loi de comportement en CT. Elle est donnée par

$$\gamma_{sk} = -\phi_k^{mc} \Delta\beta_{sk} ; \phi_k^{mc} \text{ (facteur d'influence du CT pour une plaque multicouche)} \quad (7)$$

Un test de validation intéressant et sévère a été proposé par Pagano et Hatfield [13] (Figure 4). Il consiste à évaluer numériquement la distribution d'une contrainte de CT σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée à 9 couches (fig. 4a). La solution approchée estimée par l'élément spécial à 3 nœuds DMTS (fig. 4b) permet un encadrement précis de la solution de référence proposée par les auteurs du test, avec un simple maillage à 6x6 éléments.



(a) Plaque stratifiée à 9 couches. Données

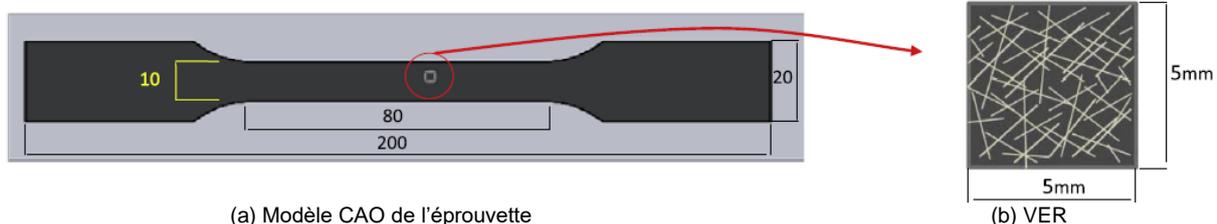


(b) Distribution de la contrainte σ_{xz} selon l'épaisseur. Performance de DMTS

Figure 4 – Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée à 9 couches (Benchmark de Pagano & Hatfield [13]).

3. Nouveaux concepts dans la modélisation comportementale des matériaux composites. Cas de l'approche de la fibre projetée

Publiée en 2014 [14] puis en 2016 pour des besoins d'analyse non-linéaire [15], l'approche de la fibre projetée (Projected Fibre Approach) s'adapte aux matériaux composites à renforts courts (aléatoires ou non) ou continues, en permettant leur modélisation quelque-soit la fraction volumique et sans soucier des problèmes de maillage ou de résolution numérique liée au nombre de ddl (degrés de liberté) à calculer. Deux éléments finis peuvent ainsi coexister. Le premier est associé à la matrice avec des ddl classiques de type déplacements. Le second élément est associé quant à lui à la fibre (renfort), avec la condition de projection de ses ddl nodaux sur ceux de la matrice, pour donner lieu à un élément fini « composites » homogénéisé sans ddl additionnels. La figure 5 montre l'exemple d'une éprouvette « composites » à matrice thermoplastique (PP) et à renfort en fibres courtes végétales (chanvre). Elle est injectée à partir de compounds extrudés, ce qui induirait une orientation aléatoire des fibres schématisée au sein du VER (Volume Élémentaire Représentatif) de la figure 5b. La figure 6 présente un maillage « composites » (matrice + fibres courtes aléatoires) du VER. Il est construit à partir de deux maillages distincts correspondant respectivement aux domaines fibreux (fig. 6a) et matriciel (fig. 6b). Grâce à une technique de projection, détaillée dans la référence [14], combinée à une recherche optimisée des zones de contact entre les éléments « fibres » et les bords élémentaires de la matrice, nous aboutissons à la modélisation d'un simple VER maillé avec un nouvel élément fini spécifique, dont la forme géométrique identique à un élément fini classique simple, en l'occurrence l'élément triangulaire plan à 3 nœuds et à 2 ddl par nœuds pour l'exemple des figures 5 et 6.



(a) Modèle CAO de l'éprouvette

(b) VER

Figure 5. Eprouvette PP-Chanvre et son Volume Élémentaire représentatif avec fibres courtes aléatoires

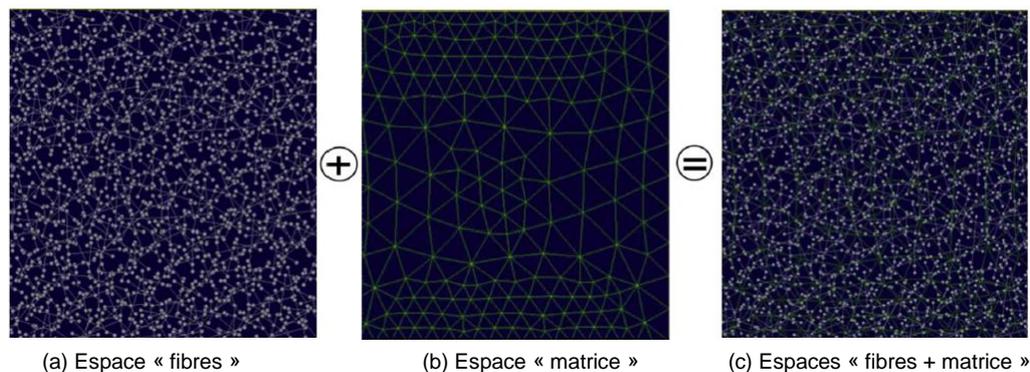


Figure 6. Maillage du VER et de ses constituants (cas du PP-Chanvre à 30% de fraction massique)

L'approche PF a été utilisée notamment pour le calcul des propriétés mécaniques en traction du composite à partir de celles de ses constituants (PP et Chanvre). A noter qu'une fraction massique à 30% de fibres végétales courtes de chanvre sur une VER (5mm x 5mm x 4mm) comporterait 19647 fibres courtes injectées de longueur 0.786mm et de diamètre 0.0211mm. 19647 éléments fins de barre à 2 nœuds sont ainsi nécessaires à la modélisation. Grâce à l'approche PF, les ddls correspondants au nombre de 78588 n'intégreront pas le calcul par éléments fins du fait de leur projection (fusion) sur l'espace matriciel (fig. 6b). Le résultat de la figure 7 est celui du module de Young calculé pour un composite PP-Chanvre à partir des propriétés du PP et du chanvre, et comparé à une mesure expérimentale obtenue par essai de traction.

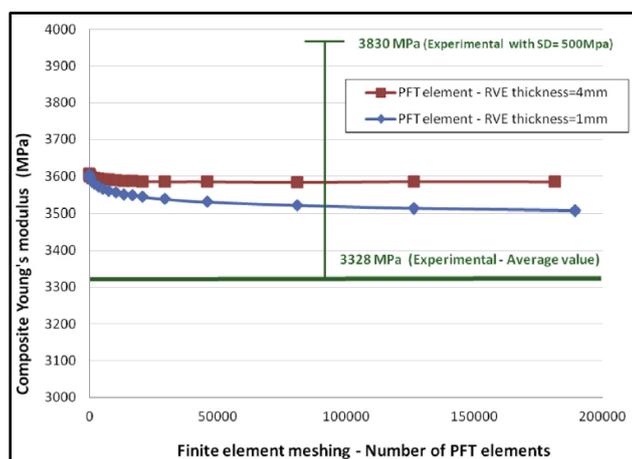


Figure 7. Comportement en traction d'une éprouvette « composites PP-Chanvre ». Convergence du Module d'Young en fonction du maillage (éléments fins triangulaires PFT)

4. Concept de Rotation d'une Fibre Spatiale (SFR concept)

Beaucoup de professionnels du monde de la mise en forme de matériaux (plasturgie, composites, ...), de la thermique et de la mécanique des fluides, utilisent aujourd'hui la modélisation numérique tridimensionnelle, exploitant ainsi l'extraordinaire développement des ordinateurs avec des processeurs plus puissants et plus performants. Ce type de modélisation gagne du terrain par rapport aux modélisations classiques surfaciques de type coque généralement basées sur des hypothèses à travers l'épaisseur comme nous l'avons mentionné en section §2. Le difficile compromis entre le coût de calcul et la précision est une des objections émises sur la modélisation 3D. Classiquement, l'obtention d'une bonne précision est tributaire de l'ordre polynomial associé aux éléments fins standards 3D. Un premier ordre (tétraèdre 4-nœuds, hexaèdre 8-nœuds, prisme 6-nœuds) nécessitant un raffinement de maillage et un ordre supérieur (tétraèdre 10-nœuds, hexaèdre 20-nœuds, prisme 15-nœuds) restent couteux en temps de calcul. Des contributions intéressantes sont ainsi apparues au cours des vingt dernières années avec comme fil conducteur, une amélioration intelligente des modèles de 1^{er} ordre sans augmenter le nombre de nœuds. Nous citons en particulier quelques approches de type « Solid-Coque » [16,17] ou en modes incompatibles [18,19]. Une des voix d'amélioration des éléments de 1^{er} ordre s'est manifestée dès le début des années 90. Il s'agit d'éléments fins 3D avec degrés de liberté rotationnels additionnels. [20,21,22,23]. Nous avons voulu apporter notre contribution en proposant un concept élémentaire nouveau ayant abouti à la formulation d'éléments fins spéciaux 3D simples de géométrie et capables de rivaliser en terme de précision avec des éléments d'ordre élevé. Il s'agit notamment du concept

de rotation de fibre dans l'espace (SFR : Space Fibre Rotation) [24] que nous avons également adapté aux matériaux piézoélectriques [25,26] et à la mise en forme des thermoplastiques (thermoformage et soufflage) [27]. Le modèle à 8-nœuds propose SFR8 (figure 8) considère une fibre virtuelle à l'intérieur de l'élément classique linéaire qui, après une rotation virtuelle dans l'espace 3D, engendre un déplacement mécanique additionnel qui a pour conséquence l'amélioration de la précision des résultats du fait de l'amélioration de l'approximation de l'élément de 1^{er} ordre standard. SFR8 garde ainsi la géométrie de l'élément standard 8 nœuds avec une approximation quadratique des déplacements, rappelant ainsi l'espace approximatif du modèle hexaédrique à 20 nœuds réputé couteux en temps de calcul.

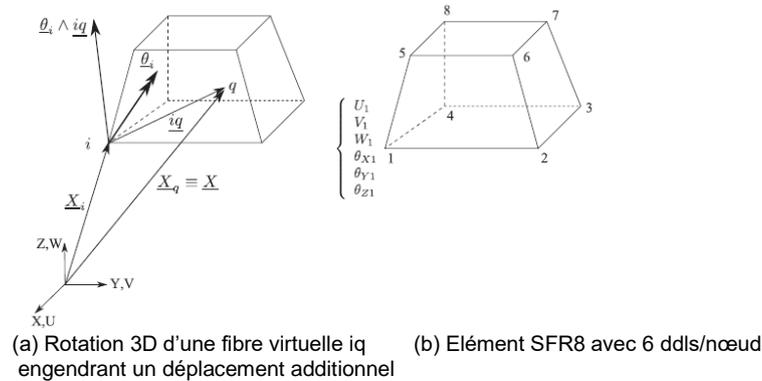


Figure 8. Le concept SFR (Space Fibre Rotation).

Un des tests sévères proposés pour valider de nouveaux éléments finis 2D/3D est le panneau biaisé de Cook. Celui-ci (figure 9) est soumis à un chargement de flexion dans le plan. Cinq modèles 3D dont les notres SFR8 et SFR8I (avec mode incompatible) sont confrontés à une distorsion de maillage. L'objectif est de tester leur sensibilité aux maillages éléments finis. Comparé à une solution de référence proposée par Cook, le déplacement au point A est approché par les cinq modèles, en fonction de l'excentricité e_1 (point D). Les deux modèles SFR (à 8 nœuds) manifestent en effet une faible sensibilité aux distorsions, contrairement aux éléments à 8 nœuds du code Abaqus (élément standard C3D8 et élément avec mode incompatible C3D8I).

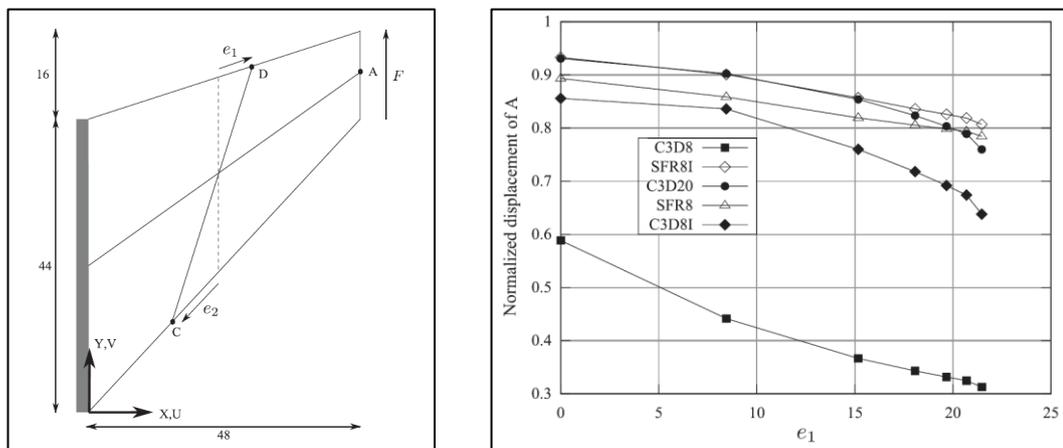


Figure 9. Panneau biaisé de Cook – Maillage non structuré 2x2 avec distorsions en D et C

4. Conclusion

Ce travail est une synthèse modeste d'une partie de nos travaux antérieurs relatifs au développement d'éléments finis spéciaux en mécanique des solides et des structures. Nous avons en particulier mis l'accent sur des cinématiques particulières introduite au sein du domaine élémentaire et nous les avons adapté à des comportements tridimensionnels de structures et à des modélisations comportementales de matériaux composites. Nous espérons avoir convaincu les chercheurs réticents à l'idée de développer des éléments finis nouveaux.

5. Bibliographie

- [1] J.A. Stricklin, W.E. Haisler, P.R. Tisdale and R. Gunderson (1969), A rapidly converging triangular plate element, AIAA Jou., Vol 7 N°1, p.180-181.

- [2] G.S. Dhatt (1970), An efficient triangular shell element, *AIAA jou.*, Vol 8, p.2100-2102.
- [3] J.L. Batoz, K.J. Bathe and L.W. Ho (1980), A study of three-node triangular plate bending elements, *Int.Jou.Num.Meth.Eng.*, Vol. 15, p. 1771-1812.
- [4] J.L. Batoz et M.Ben Tahar (1982a), Evaluation of a new thin plate quadrilateral element, *Int.Jou.Num.Meth.Eng.*, Vol.18, N°11, p. 1655-1678.
- [5] J.L. Batoz (1982b), An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element, *Int.Jou.Num.Meth.Eng*, Vol.18, p. 1077-1089.
- [6] E. Reissner (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of plates, *Jou. App. Mech.* 12, A69-A77.
- [7] R.D. Mindlin (1951), Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates, *Jou. Appl. Meth.*, Vol 18, p.31-38.
- [8] T. Kerber (1990), Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes, *La Rech. Aéronautique*, N°3, p.45-79.
- [9] R. Ayad, J.L. Batoz et G. Dhatt, "Un élément quadrilatéral de plaque basé sur une formulation mixte-hybride avec projection en cisaillement ", *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol 4, N° 4, 415-440 (1995)
- [10] R. Ayad, G. Dhatt et J.L. Batoz (1998), A New hybrid-Mixed Variational Approach for Reissner-Mindlin Plates. The MiSP model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 42, 1149-1179.
- [11] R. Ayad, *Éléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*, Thèse de Doctorat, UTC Compiègne, 1993.
- [12] G.M. Lindberg, M.D. Olson & G.R.Cowper (1969), New development in the finite element analysis of shells, *Q. Bull Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment*, National Research council of Canada, Vol. 4.
- [13] Pagano, N. and H.J. Hatfield, Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. *AIAA journal*, 1972. 10; p. 931-933.
- [14] H. Kebir et R. Ayad, "A specific finite element procedure for the analysis of elastic behaviour of short fibre reinforced composites. The Projected Fibre approach", *Composite Structures*, Volume 118, Issue 1, 2014, Pages 580-588
- [15] A. Tiar, W. Zouari, H. Kebir & R. Ayad, A nonlinear finite element formulation for large deflection analysis of 2D composite structures, *Composite Structures*, Vol 153, pp 262-270, 2016
- [16] Klinkel S, Gruttmann F, Wagner W. A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2006; 195:179–201.
- [17] Schwarze M, Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept-Geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; 80:1322–1355.
- [18] Areais P, César de Sa J, Conceição Antonio C, Fernandes AA. Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; 58:1637–1682.
- [19] Alves de Sousa RJ, Natal Jorge RM, Fontes Valente RA, Cesar de Sa JMA. A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element. *Engineering Computations* 2003; 20:896–925.
- [20] Yunus SM, Pawlak TP, Cook RD. Solid elements with rotational degrees of freedom: part I—hexahedron elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991; 31:573–592.
- [21] Pawlak TP, Yunus SM, Cook RD. Solid elements with rotational degrees of freedom: part II – tetrahedron elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991; 31:593–610.
- [22] Sze KY, Ghali A. A hybrid brick element with rotational degrees of freedom. *Computational Mechanics* 1993; 12:147–163.
- [23] Tian R, Matsubara H, Yagawa G. Advanced 4-node tetrahedrons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2006; 68(12):1209–1231.
- [24] Rezak Ayad¹, Wajdi Zouari^{1,*}, †, Kamel Meftah², Tarak Ben Zineb^{3,4} and Ayeche Benjeddou, Enrichment of linear hexahedral finite elements using rotations of a virtual space fiber , *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2013; 95:46–70
- [25] Zouari, W., Ayad, R., Ben Zineb, T., Benjeddou, A.: A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 90, 87–115 (2012)
- [26] *Acta Mech* 226, 1737–1756 (2015) Wajdi Zouari · Mustapha Assarar · Kamel Meftah · Rezak Ayad Free vibration analysis of homogeneous piezoelectric structures using specific hexahedral elements with rotational DOF
- [27] Ghomari, T., Talbi, N., Ayad, R., Kerdal, D., Ziane, M.: An axisymmetric hyperelastic solid model for forming processes of hollow plastic bodies. *J. Appl. Sci.* 6, 1251–1257 (2006)